

Cap 1 y 2: Finanza Matematica: Valutazione e copertura | Ottimizzazione di portafoglio

Andrea Pascucci, Wolfgang J. Runggaldier



Springer, 2009

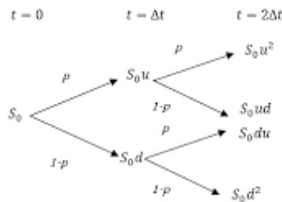
Camilo Escorza

Outline

- Motivación
- Definiciones
- Planteamiento problema consumo
- Resolución via Martingala

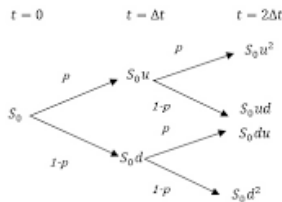
Motivación

- El modelo binomial se enseña en el curso Teoría Financiera para entender la lógica de **valoración clásica bajo un sistema estocástico discreto**, en donde la probabilidad de obtener cierto estado de la naturaleza, dado el anterior, sigue una distribución bernoulli
- Vamos a extender este razonamiento a **n períodos, binomial y trinomialmente**



Motivación

- Esto con el motivo de utilizar esta metodología clásica de valoración de activos (notablemente derivados) para **obtener sendas de consumo** bajo estas condiciones.
- También voy a tocar las soluciones dadas por el método de **Programación Dinámica** en estos mismos escenarios



Modelo Binomial (TeFi)

- Dos estados de la naturaleza en $t+1$: up y down
- Un activo riesgoso S y activo libre de riesgo B
- En up: $S_t \rightarrow u \cdot S_t$
En down: $S \rightarrow d \cdot S_t$
- Se suele plantear el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = X^u \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = X^d \end{cases}$$

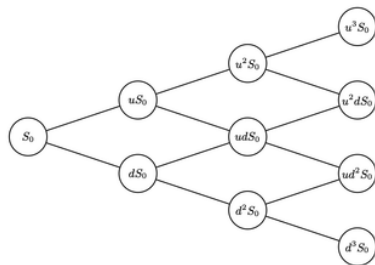


Fig. 1.1. Albero binomiale a tre periodi

Modelo Binomial (TeFi)

- El sistema tiene la siguiente solución:

$$\bar{\alpha}_N = \frac{X^u - X^d}{(u - d)S_{N-1}} \quad \bar{\beta}_N = \frac{uX^d - dX^u}{(1 + r)^N(u - d)}$$

- Esta manera es la de “hedging”: las ecuaciones nacen de la imitación de los pagos del activo. Una manera financieramente más intuitiva sería calcular el precio de hoy como **la esperanza de los pagos descontados**.
- Sin embargo no siempre tenemos las probabilidades reales para hacer esto, e incluso si las tuvieramos, *no tiene mucho sentido descontar pagos riesgosos a una tasa de interés sin riesgo*. Estaríamos subestimando el riesgo y sobre-estimando el precio.

Probabilidad Risk Neutral (caso binomial)

- Dado que es un sistema lineal (y que se cumplen ciertas condiciones de completitud de mercado), se puede “**forzar**” la solución, generando lo que se llaman **probabilidades risk-neutral**. Esto se logra planteando el problema de la siguiente manera:

$$S_0(1 + r) = \pi S^u + (1 - \pi) S^d.$$

- Esto es literalmente forzar a que exista una probabilidad ‘ficticia’ que haga que la esperanza descontada a la tasa libre de riesgo (ergo, probabilidad risk-neutral) de los pagos de mañana, utilizando esos ponderadores, sea el valor de hoy del activo.

$$\frac{1 + r - d}{u - d} = q$$

Generalización del modelo

- Antes de seguir, conviene generalizar las concepciones de este problema:
- El libro trata la solución de problemas de valoración: Se quiere saber, dado un ambiente incierto, cuanto vale un activo riesgoso, para luego poder resolver otros problemas de interés.
- Dado que todos los períodos (en este caso, discretos) poseen variables aleatorias que naturalmente se ven afectadas por al menos el período inmediatamente anterior, se generan consecuentemente sucesiones de variables aleatorias, lo que por definición es un proceso estocástico.
- Un proceso estocástico tiene al menos un factor de aleatoriedad. En el caso binomial es el retorno del activo.

Proceso estocástico

- Antes de seguir, conviene generalizar las concepciones de este problema:
- Vamos a trabajar sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde
 - Ω (espacio muestral) indica todos los resultados posibles de una variable (en este caso es finito);
 - $\mathcal{F}$ (espacio de sucesos) que en este caso es el conjunto potencia de Ω , que indica todos los eventos posibles y;
 - P (función de probabilidad) es la función que asigna una medida a los elementos del espacio de sucesos entre 0 y 1. En definitiva, $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$
- La variable de interés es evidentemente el retorno aleatorio del activo. En el caso binomial, la variable $1+\mu$ tiene $\Omega = \{u, d\}$ y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{u\}, \{d\}, \{u,d\}\}$. Un ejemplo de función de probabilidad es la probabilidad risk-neutral, que asigna un valor menor a 1 al evento “u”, el complemento a “d” y 0 al evento vacío y al evento conjunto.

Proceso estocástico

- En particular, los retornos riesgosos de los activos (μ) serán la variable de interés. Dada la naturaleza temporal de estos retornos, tienen un espacio de sucesos **“acotado” a la información que efectivamente se tiene en el momento en que ocurren**. Se dice una “fuga” o “filtración” al subconjunto del espacio de sucesos que efectivamente ha sucedido hasta el momento k .

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^\mu := \sigma \mu_k \quad k \leq n \quad n = 1 \dots N$$

- Esta diferenciación es principalmente técnica, para entender y notar cuando la esperanza de un retorno generalmente no es referida de manera incondicional, sino que condicionada a lo que ha pasado anteriormente

Portafolio (estrategia) autofinanciante

- Un portafolio/estrategia (α, β) es un **proceso estocástico** en $\mathbb{R}^{d+1}$:
 $(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha^{1n}, \dots, \alpha^{dn}, \beta^n)$ para $n = 1, \dots, N$

Valor del portafolio: $V^n = \alpha^n \cdot S^n + \beta^n \cdot B^n$

- Es **predecible**: la posición en $[t^{n-1}, t^n]$ se decide con la información de t^{n-1} (medible con la información de la fuga)
- Condición de **autofinanciamiento**:

$$\alpha_{n-1} S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}$$

En principio se va ajustando en cada período la proporción en activo riesgoso para el siguiente período. Short-selling permitido: $\alpha^n < 0 \wedge \beta^n < 0$ es admisible

Dinámica de la riqueza y numeraire

- La riqueza evoluciona según la rentabilidad de la estrategia:

$$V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n)$$

- Podemos ver, con algo más de álgebra, que el retorno esperado de un portafolio es una combinación lineal de los retornos esperados de sus activos.
- Podemos aplicar al portafolio, por motivos que he adelantado previamente, lo que se llama un “**numeraire**”, que es una unidad de medida la que convenientemente designaremos como el bono:

Activo descontado (numeraire B): $\tilde{S}^n = S^n / B^n$

El rendimiento descontado de una estrategia queda como $\tilde{V}^n = \tilde{V}^{n-1} + \alpha^n (\dot{S}^n - \dot{S}^{n-1})$, lo que es una suma de incrementos de los activos riesgosos descontados

Arbitraje

- El arbitraje se define como una estrategia autofinanciante que cumpla lo siguiente:

$$i) \quad V_0^{(\alpha \beta)} = 0;$$

$$ii) \quad V_N^{(\alpha \beta)} \geq 0;$$

$$iii) \quad P \left(V_N^{(\alpha \beta)} > 0 \right) > 0$$

- *Si dice che un modello di mercato è libero da arbitraggi se la famiglia $\mathcal{A}$, delle strategie autofinanzianti e predicibili, non contiene arbitraggi.*

Medida Martingala

- **Definizione 1.13.** *Una misura martingala (con numeraire B) è una misura di probabilità Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che:*

- i) Q è equivalente¹ a P ;*
- ii) per ogni $n = 1, \dots, N$ vale*

$$\tilde{S}_{n-1} = E^Q [\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \quad (1.21)$$

ossia $\tilde{S}$ è una Q -martingala.

1) Dos medidas se dicen equivalentes si asignan probabilidad 0 a exactamente los mismos eventos de $\mathcal{F}$

- Esto significa fundamentalmente que **el mejor predictor del precio de mañana** (descontado a la tasa libre de riesgo) **es el precio de hoy**
- Bajo Q , **ninguna acción tiene mayor retorno esperado que el bono**
 Q no es la probabilidad real del mundo — es una probabilidad «ficticia» que elimina las primas de riesgo

Teoremas fundamentales de la valoración

Primer teorema de la valoración

Un mercado a tiempo discreto está libre de arbitrajes

$\Leftrightarrow$

$\exists$ al menos una medida martingala Q equivalente a P

- Esto deriva en que puedo **evaluar el valor de cualquier activo como la esperanza (bajo alguna Q) de sus flujos descontados a la tasa libre de riesgo**, lo que es bastante conveniente a la hora de computar, y especialmente a la hora de generar expresiones analíticas para valorar instrumentos financieros complejos
- La demostración $\Leftarrow$ no es tan complicada pero no tiene propósito hacerla. La $\Rightarrow$ necesita del teorema de Hahn-Banach, lo que genera que la medida martingala sea el hiperplano separador entre el conjunto de estrategias con $V=0$ y el conjunto de estrategias con pagos positivos, equivalente a decir que no hay arbitraje.

Teoremas fundamentales de la valoración

Segundo teorema fundamental de la valoración

Un mercado libre de arbitrajes es completo $\Leftrightarrow \exists! Q$

- Un mercado completo significa que todos los derivados que puedan existir pueden ser replicados.
- Vimos en TeFi que un mercado estaba completo cuando el numero de activos con pagos linealmente independientes con respecto a los estados de la naturaleza era igual a la cantidad de estos. Esto generaba la posibilidad de diagonalización y existencia de los activos puros de Arrow-Debrew.
- Creo que una buena manera de conectar esto (completitud y medida martingala única) es estudiando el caso trinomial. No lo voy a demostrar pero así se puede ilustrar.

Caso Trinomial

- Se define un proceso estocástico h que toma 3 valores, indicando tres estados de la naturaleza:

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilit\`a } p_1, \\ 2 & \text{con probabilit\`a } p_2, \\ 3 & \text{con probabilit\`a } p_3 = 1 - p_1 - p_2, \end{cases}$$

- En el modelo trinomial puede haber una acci3n riesgosa (mercado incompleto) o dos acciones riesgosas (mercado completo). Al primero se le llama trinomial estandar y al segundo trinomial completado.
- La trayectoria del activo sigue la siguiente l3gica:

$$S_n^i = S_{n-1}^i (1 + \mu^i(h_n)), \quad n = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \quad (1.42)$$

dove

$$1 + \mu^i(h) = \begin{cases} u_i & \text{se } h = 1, \\ m_i & \text{se } h = 2, \\ d_i & \text{se } h = 3, \end{cases}$$

Caso Trinomial (Incompleto)

- Para resolver via martingala, planteamos la martingalidad

$$S_{n-1}^1(1+r) = E^Q [S_{n-1}^1 (1 + \mu(h_n)) \mid \mathcal{F}_{n-1}],$$

dove $\mu(h) = \mu^1(h)$, da cui, usando la notazione

$$q_j^n = Q(h_n = j \mid \mathcal{F}_{n-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad n = 1, \dots, N,$$

otteniamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} u_1 q_1^n + m_1 q_2^n + d_1 q_3^n = 1 + r, \\ q_1^n + q_2^n + q_3^n = 1. \end{cases}$$

- Notamos que hay 3 medidas que asignar y 2 ecuaciones que las restringen (la de martingalidad del activo y la de medida como probabilidad), por lo que hay infinitas soluciones, dadas por combinaciones lineales de martingalas “extremales”.

Caso Trinomial (Incompleto)

- También se puede notar el mismo problema desde el punto de vista del “hedge”:

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = X^u \\ \alpha_N m S_{N-1} + \beta_N B_N = X^m \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = X^d \end{cases}$$

- Notamos que hay 2 activos y 3 estados de la naturaleza, lo que es el planteamiento clásico de TeFi

Caso Trinomial (Completo)

- Planteando la condición de martingalidad al caso del trinomial completo:

$$\begin{cases} u_1 q_1^n + m_1 q_2^n + d_1 q_3^n = 1 + r \\ u_2 q_1^n + m_2 q_2^n + d_2 q_3^n = 1 + r \\ q_1^n + q_2^n + q_3^n = 1 \end{cases}$$

- Se nos generan 3 medidas y 3 ecuaciones. La nueva ecuación viene a indicar que el retorno del segundo activo riesgoso en promedio tiene que ser el retorno libre de riesgo, por lo que ahora hay 2 activos que necesitan cumplir eso, generando las dos primeras ecuaciones. La tercera ecuación es la condición de que estas medidas deben sumar 1.

Caso Trinomial (Completo)

- Resolviendo vía réplica se generan 3 ecuaciones, que son la replica de cada estado de la naturaleza, con 3 variables, que son el peso de cada activo.

$$\begin{cases} \alpha_n^1 u_1 S_{n-1}^1 + \alpha_n^2 u_2 S_{n-1}^2 + \beta_n (1+r)^n = H_n^u \\ \alpha_n^1 m_1 S_{n-1}^1 + \alpha_n^2 m_2 S_{n-1}^2 + \beta_n (1+r)^n = H_n^m \\ \alpha_n^1 d_1 S_{n-1}^1 + \alpha_n^2 d_2 S_{n-1}^2 + \beta_n (1+r)^n = H_n^d \end{cases}$$

- Las soluciones son muy grandes.
- Como pueden intuir, si hay m estados de la naturaleza, se necesitan m activos (con pagos linealmente independientes con respecto a los estados). En particular si hay uno sin riesgo, se necesitan $m-1$.

Ilustración segundo teorema fundamental

- Como pudieron apreciar, las soluciones usando portafolio imitador y martingala era como ‘transponer’ la matriz. Esto es, de manera literal, lo que pasa:

$$\begin{cases} u_1 q_1^n + m_1 q_2^n + d_1 q_3^n = 1 + r \\ u_2 q_1^n + m_2 q_2^n + d_2 q_3^n = 1 + r \\ q_1^n + q_2^n + q_3^n = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 & m_1 & d_1 \\ u_2 & m_2 & d_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_n^1 u_1 S_{n-1}^1 + \alpha_n^2 u_2 S_{n-1}^2 + \beta_n (1+r)^n = H_n^u \\ \alpha_n^1 m_1 S_{n-1}^1 + \alpha_n^2 m_2 S_{n-1}^2 + \beta_n (1+r)^n = H_n^m \\ \alpha_n^1 d_1 S_{n-1}^1 + \alpha_n^2 d_2 S_{n-1}^2 + \beta_n (1+r)^n = H_n^d \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{pmatrix}$$

- El hecho de que el primer sistema admita una única solución significa que su matriz (siendo un mapa lineal) es inyectiva. El hecho de que el segundo sistema admita solución para todo H indica que es subyectiva.

Ilustración segundo teorema fundamental

- Dado que si un mapa linear es inyectivo si y sólo si su transpuesta es subyectiva, el hecho de que exista una única martingala implica que el mapa linear es inyectivo, por lo que su transpuesta es sobreyectiva y todos los activos se pueden replicar (mercado completo). Al inverso, si todos los activos se pueden replicar, el mapa linear es sobreyectivo y transponiendolo genera inyectividad en el mapa linear de las martingalas (generando al menos las mismas ecuaciones que medidas), por lo que garantiza una única martingala.

$$\begin{pmatrix} u_1 & m_1 & d_1 \\ u_2 & m_2 & d_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ m_2 & m_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Planteamiento del problema de consumo

- El modelo más básico de consumo intertemporal con riesgo que vemos en la carrera es el de Fischer, notablemente visto en Intro a Macro, FuFi, Estrategia de la organización, Microeconomía 2, Macroeconomía 1 y en diversos OPR's como Teoría de Inversiones.
- El modelo de Fischer, en particular en su extensión con activos riesgosos, se inserta en el marco que hemos trabajado hasta ahora; es un sistema estocástico. Pero tenemos un nuevo elemento: **La maximización de utilidad esperada.**
- Para resolver esto usando las herramientas que hemos visto, recordemos que el primer teorema de la valoración logra que yo pueda valorar en el tiempo 0 cualquier estrategia de pagos como la esperanza bajo Q de los pagos descontados. Entendiendo pagos como cantidades positivas, yo también puedo generar el valor actual de una **estrategia de consumo** al tiempo 0 (cuanto me cuesta una cierta estrategia de consumo).
- Es básicamente $VP(\text{Provisión}) = VP(\text{Consumo})$, y el problema pasa a ser estático.

Planteamiento del problema de consumo

- Definimos estrategia con consumo: (α, β, C) donde $C^n \geq 0$ es el consumo en t^n . La condición de autofinanciamiento con consumo:

$$V_{n-1} = \alpha^n S_{n-1} + \beta^n B_{n-1} + C_{n-1}; \text{ es admisible cuando } V^n \geq C^n$$

- Análogamente al caso sin consumo, la condición de autofinanciamiento es:

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} - \tilde{C}_{n-1} + \alpha_n (\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})$$

- Luego aplicando esperanzas martingalas, se genera esta trivialidad:

$$V_{n-1} = E^Q \left[\frac{V_n}{1+r} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] + C_{n-1}$$

Planteamiento del problema de consumo

- En el libro se definen las típicas condiciones de Inada para las funciones de utilidad, en particular $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, por lo que el problema se postula de la siguiente manera:

$$\max_{\alpha, C} E \left[\sum_{n=0}^N u_n(C_n) + u \left(V_N^{(\alpha, C)} - C_N \right) \right]$$

- Donde la restricción está en que el proceso de consumo debe poder ser alcanzado con el budget inicial.
- Existe una solución si y sólo si el mercado está libre de arbitraje.**

Método martingala

- Asumiendo mercados con al menos 1 medida martingala, existen 3 pasos que seguir de manera general para resolver este problema:
 1. Determinar el conjunto de procesos de consumo alcanzables con el valor inicial
 2. Determinar el proceso de consumo alcanzable óptimo
 3. Determinar la estrategia autofinanciante que logra ese consumo óptimo
- Para el caso en que sólo hay riqueza final y hay mercado completo, el proceso es el siguiente:
 - 1) El primer problema usualmente se remite a utilizar la condición de martingalidad que permite el primer teorema de la valoración, en donde puedo valorar en t_0 la esperanza bajo Q del consumo descontado.
 - 2) Teniendo esto de constraint, aplicamos Lagrange para sacar el óptimo
 - 3) Luego para “caracterizar” este óptimo, resolvemos el típico problema de hedge.

Método martingala (Mercado completo | Valor riqueza final)

- Para el P1) tenemos la siguiente caracterización de los consumos alcanzables, que sería la restricción de nuestro lagrangeano:

$$\mathcal{V}_v = \{V - E^Q [B_N^{-1} V] = v\}$$

- Para el P2), conviene definir la función $I := (u')^{-1}$. La solución del Lagrangeano es la siguiente:

$$\bar{V}_N = \mathcal{I}(\lambda \tilde{L}) \quad (2.32)$$

dove $\tilde{L} = B_N^{-1} L$ con $L = \frac{dQ}{dP}$, essendo Q la misura martingala, e $\lambda \in \mathbb{R}$ è determinato dall'equazione

$$E^P [\mathcal{I}(\lambda \tilde{L}) \tilde{L}] = v \quad (2.33)$$

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo final)

● Demostración:

Podemos pensar el problema como el problema clásico de maximización de utilidad esperada, bajo la probabilidad real:

$$f(V) := \sum_{i=1}^M u(V_i) P_i = E^P [u(V)]$$

Sujeta a la caracterización de las trayectorias posibles obtenida en P1). Luego postulamos el Lagrangeano de manera común:

$$g(V) := \sum_{i=1}^M B_N^{-1} V_i Q_i - v = E^Q [B_N^{-1} V] - v = 0 \quad \text{e} \quad V_i > a$$

$$\mathcal{L}(V, \lambda) = f(V) - \lambda g(V)$$

Annullando il gradiente otteniamo il sistema di equazioni

$$\partial_{V_i} \mathcal{L}(V, \lambda) = u'(V_i) P_i - B_N^{-1} \lambda Q_i = 0 \quad i = 1 \quad M \quad (2.34)$$

$$\partial_{\lambda} \mathcal{L}(V, \lambda) = \sum_{i=1}^M B_N^{-1} V_i Q_i - v = 0 \quad (2.35)$$

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo final)

- Dado que u' es biyectiva y dado el mercado completo, la solución es única.

$$(\bar{V}_N)_i = \mathcal{I} \left(B_N^{-1} \lambda \frac{Q_i}{P_i} \right)$$

Esto es una suerte de TMS. Tenemos el componente del bono, las medidas de probabilidad divididas y el lambda.

- La otra ecuación es la de budget, en la cual se inserta esta optimalidad y se dicta si es posible en esperanza bajo Q descontada:

$$h(\lambda) := \sum_{i=1}^M B_N^{-1} \mathcal{I} \left(B_N^{-1} \lambda \frac{Q_i}{P_i} \right) Q_i = v$$

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo intermedio)

- Cuando se trabaja con el metodo martingala para sacar el P1) del consumo intermedio, surge la siguiente expresión:

$$f(C) := \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^N u_n(C_{n,i}) P_i = E^P \left[\sum_{n=0}^N u_n(C_n) \right]$$

Que es la suma de las utilidades a través del tiempo, por la probabilidad real de que pasen.

- El tema es que convendría algebraicamente pasar de la probabilidad real a la martingala en algun momento, para sacarme la esperanza bajo la probabilidad real.

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo intermedio)

- Para lograr cambiar de numeraire o de medida, podemos utilizar las derivadas de **Radon-Nikodym**, que son, por decirlo de alguna manera, una generalización topológica del cambio de variable. En este caso usaremos la definición donde (sobre un espacio de probabilidad, etc), una derivada RN es tal que:

$$Z := \frac{dQ^Y}{dQ} \quad E^{Q^Y}[X] = E^Q[XZ]$$

- Siendo X una variable aleatoria. O sea que la esperanza de la variable bajo otra medida equivalente es igual la esperanza de la variable multiplicada por esta derivada. Generalmente f es RN si:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

- Con esto podemos pasar de la medida martingala a la medida real.

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo intermedio)

- Trabajando la P1) con la RN:

$$\begin{aligned} v &= E^Q \left[\sum_{n=0}^N B_n^{-1} C_n \right] = E^P \left[\sum_{n=0}^N B_n^{-1} C_n L \right] \\ &= E^P \left[\sum_{n=0}^N E^P [B_n^{-1} C_n L | \mathcal{F}_n] \right] = E^P \left[\sum_{n=0}^N C_n \tilde{L}_n \right] \end{aligned}$$

- Trabajando la RP con esta expresión:

$$g(C) = \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^N C_{n,i} \tilde{L}_{n,i} P_i - v = E^Q \left[\sum_{n=0}^N B_n^{-1} C_n \right] - v$$

- Podemos plantear el Lagrangeano de manera normal

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo intermedio)

- Las CPO's del Lagrangeano salen así:

Otteniamo quindi il sistema di equazioni

$$\partial_{C_{n,i}} \mathcal{L}(C, \lambda) = u'_n(C_{n,i}) P_i - \lambda \tilde{L}_{n,i} P_i = 0 \quad (2.57)$$

per $i = 1, \dots, M$ $n = 0, \dots, N$ e

$$\partial_{\lambda} \mathcal{L}(C, \lambda) = \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^N C_{n,i} \tilde{L}_{n,i} P_i - v = 0 \quad (2.58)$$

- De donde sale la “TMS”

$$\bar{C}_{n,i} = \mathcal{I}_n \left(\lambda \tilde{L}_{n,i} \right)$$

- Luego la solución para lambda:

$$h(\lambda) := \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^N \mathcal{I}_n \left(\lambda \tilde{L}_{n,i} \right) \tilde{L}_{n,i} P_i = v$$

Método martingala (Mercado completo | Valor consumo intermedio)

- Luego para replicar la senda del consumo obtenido, se puede replicar cada senda de consumo cada período, pero también se puede hacer recursivamente utilizando el tema del portafolio autofinanciante

- Para utilidad **logaritmica**, el consumo es: $\bar{C}_n = \frac{v(1+r)^n}{N+1} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu_n} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-\nu_n}$

$$\begin{aligned}\bar{V}_n &= \bar{C}_n + \frac{v(1+r)^n}{N+1} (N-n) \\ &\quad \cdot \left(q \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu_n+1} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-\nu_n} + (1-q) \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu_n} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n+1-\nu_n} \right) \\ &= \bar{C}_n + (N-n) \frac{v(1+r)^n}{N+1} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu_n} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-\nu_n} (p + (1-p)) \\ &= (N-n+1) \bar{C}_n\end{aligned}$$

Método martingala | Modelo Binomial

- Utilizando las formulas:

La derivada RN:

$$S_n = u^{\nu_n} d^{n-\nu_n} S_0$$

$$Q(-\omega-) = q^{\nu_N(\omega)} (1-q)^{N-\nu_N(\omega)} \quad \omega \in \Omega$$

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}$$

$$\begin{aligned} E \left[\frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_n \right] (\omega) &= E \left[\frac{dQ}{dP} \middle| \nu_n = k \right] \\ &= \frac{1}{P(\nu_n = k)} \int_{\nu_n=k} \left(\frac{dQ}{dP} \right) dP = \frac{Q(\nu_n = k)}{P(\nu_n = k)} \end{aligned}$$

ossia

$$L_n = \left(\frac{q}{p} \right)^{\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{n-\nu_n}$$

Método martingala | Modelo Binomial | Utilidad Final

- El valor final TMS:

$$\bar{V}_N = (\lambda \tilde{L})^{-1} = \frac{(1+r)^N}{\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu_N} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{N-\nu_N}$$

- El budget:

$$v = E \left[\frac{\tilde{L}}{\lambda \tilde{L}} \right] = \lambda^{-1}$$

$$\bar{V}_N = \frac{v}{\tilde{L}} = v(1+r)^N \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu_N} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{N-\nu_N}$$

- Utilidad óptima:
$$\begin{aligned} E[\log \bar{V}_N] &= \log v + N \log(1+r) + E[\nu_N] \log \frac{p}{q} + (N - E[\nu_N]) \log \frac{1-p}{1-q} \\ &= \log v + N \log(1+r) + Np \log \frac{p}{q} + N(1-p) \log \frac{1-p}{1-q} \end{aligned}$$

Método martingala | Modelo Binomial | Utilidad Final

- Paso 3) encontrar el portafolio

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = v(1+r)^N \left(\frac{p}{q}\right)^{k+1} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{N-k-1} \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = v(1+r)^N \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{N-k} \end{cases}$$

$$\alpha_N = \frac{v(1+r)^N \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{N-k} (p-q)}{q(1-p)S_{N-1}(u-d)}$$

$$\beta_N = \frac{v \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{N-k} ((p-1)qu - dp(q-1))}{q(p-1)(u-d)}$$

- Paso 3) Nótese que bajo estas condiciones (CRRA), la proporción invertida en activo riesgoso es siempre la misma (Merton, 1969)

$$\pi_n = \frac{\alpha_n S_{n-1}}{\bar{V}_{n-1}} = \frac{(1+r)(p-q)}{(u-d)q(1-q)}$$

Comentarios sobre mercados incompletos

- En mercados incompletos se genera un conjunto convexo de martingalas válidas. Curiosamente es convexo porque se puede encontrar medidas martingalas ‘extremales’ de las cuales generar las demás a través de combinaciones lineales, que serían como las ‘puntas’ del conjunto.
- Esto logra que generalmente exista un ‘rango de precios’ de derivados, y la pega en la práctica sería calibrar cual sería la medida que mejor describe los precios en la realidad, usando criterios como minimizar entropía o minimos cuadrados.
- El problema de consumo, al haber varias martingalidades, se vuelve bastante restrictivo. Esto es porque la R.P que surge al resolver P1) ahora no tiene sólo 1 martingalidad, sino que tiene que cumplir todas las martingalidades de las medidas extremas.

Comentarios finales

- El método de martingalas es, a mí parecer, la mayor expresión de fuerza bruta que se puede intentar para resolver problemas discretos. La extensión a modelos continuos es bastante más práctica y elegante con respecto a sus fines principales (valoración)
- Para resolver problemas a tiempo discreto, es en mi opinión bastante más práctico y robusto utilizar programación dinámica. Esta también tiene aplicaciones para derivados, a tiempo discreto con la ecuación de Bellman normal y continuo con la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman, y aparte creo que es más computacionalmente adaptable y amigable que el planteamiento de la martingalidad.

Muchas gracias por su atención!